

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TW 63

Warmte-overdracht in een gietblok

H.A. Lauwerier

December 1959

Warmte-overdracht in een gietblok

1. Inleiding

Aan het Mathematisch Centrum werd de vraag gesteld een wiskundig onderzoek te verrichten over het gedrag van een stalen gietblok in de volgende drie fasen onmiddellijk volgend op het gietproces

- I afkoeling in de vorm,
- II afkoeling zonder vorm,
- III egalisering.

In wezen betreft het hier een warmtegeleidingsprobleem dat beschreven kan worden door een partiële differentiaalvergelijking met zekere randvoorwaarden. De hierbij voorkomende moeilijkheden zijn deels van mathematische deels van fysische aard.

De mathematische formulering van de randvoorwaarden vooronderstelt een juiste kennis van wat er zich aan het oppervlak van het blok afspeelt, b.v. de invloed van straling en convection. Zodra de eigenschappen hiervan bekend zijn kunnen de desbetreffende differentiaalvergelijking en randvoorwaarden opgesteld worden. De mathematische uitwerking is in het algemeen slechts mogelijk door gebruik te maken van een grote elektronische rekenmachine. Het is hierbij wenselijk het probleem tot een tweedimensionaal probleem te vereenvoudigen (staaf met een rechthoekige doorsnede). Deze methode wordt o.a. gevolgd door Sarjant en Slack.

De essentiële mathematische moeilijkheid bij dit soort problemen is het optreden van een variabel scheidingsvlak tussen twee gebieden, de een vloeibaar, de ander vast. De wijze waarop dit front zich beweegt, zodanig dat b.v. bij stolling het vaste gebied zich uitbreidt, is a priori onbekend en is zelf door het probleem bepaald. Problemen van deze aard treden veelal op bij faseovergangen als smelten, stollen, kristallisatie, en heten Stefan-problemen naar de eerste onderzoeker.

Slechts onder zeer vereenvoudigde aannamen kan men met behulp van de analytische hulpmiddelen van de wiskunde enig inzicht verkrijgen. In § 2 wordt aldus het klassieke probleem van Neumann nog eens behandeld. In feite wordt hierbij het blok vervangen door een planparallele plak of een halfruimte, hetgeen neerkomt op een reductie tot een één dimensionaal probleem. De randvoorwaarde bij het probleem van Neumann is dat de temperatuur aan de wand plotseling ver-

laagd wordt en verder constant wordt gehouden. Ondanks deze kunstmatige randvoorwaarde geeft het probleem van Neumann het aantrekkelijke resultaat dat het grensvlak met de wortel van de tijd voortschrijdt, hetgeen in de praktijk vrij goed schijnt te kloppen. In § 3 behandelen we een uitbreiding van het probleem van Neumann, waarbij de warmtegeleidingscoëfficiënt een functie van de temperatuur is. De oplossing van dit probleem is aangegeven door de heer M.L. Potters van het Mathematisch Centrum. In § 4 behandelen we een generalisatie van het probleem van Neumann, waarbij een willekeurige randvoorwaarde gekozen is. Dit komt dus er op neer, dat van het gietblok slechts een zijvlak bekeken wordt. Mathematisch leidt dit probleem tot een integraalvergelijking welke redelijk hanteerbaar is, d.w.z. dat er een analytische benaderingsmethode mogelijk is en dat een numerieke oplossing met betrekkelijk eenvoudige hulpmiddelen kan worden uitgevoerd. De essentiële beperking van deze methode is dat slechts één dimensie beschouwd wordt. Een tweedimensionaal model vereist daarentegen, zoals boven opgemerkt, het gebruik van omvangrijke numerieke hulpmiddelen.

2. Probleemstelling

We beschouwen het model van een halfruimte $x > 0$ welke op het begintijdstip $t=0$ geheel uit vloeibaar staal bestaat waarvan de temperatuur T juist de smelttemperatuur T_m is. Aan de wand $x=0$ gaat warmte verloren volgens een of ander principe, hetgeen uitgedrukt kan worden in een zekere randvoorwaarde van algemene aard. Ten gevolge hiervan treedt stolling op en wel zodanig dat het vaste gebied zich uitbreidt in de richting van de positieve X -as. Nemen we aan dat op zeker ogenblik het gestolde medium bepaald is door $0 < x < X(t)$ en het vloeibare medium, dat dus steeds de stollings-temperatuur T_m bezit, door $x > X(t)$, dan vindt aan het front $X(t)$ warmte-productie plaats ten gevolge van de vrijkomende stollings-warmte.

Mathematisch wordt het probleem beschreven door de partiële differentiaalvergelijking in het gebied $0 < x < X(t)$

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left\{ K(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right\} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} ,$$

en de randvoorwaarden

$$(2.2) \quad x=0 \quad \frac{\partial T}{\partial x} + aT + b = 0 ,$$

$$(2.3) \quad x=X(t) \quad \left\{ \begin{array}{l} T = T_m , \\ K \frac{\partial T}{\partial x} = \rho L \frac{dX}{dt} . \end{array} \right.$$

De beginvoorwaarde is tenslotte

$$(2.4) \quad t=0 \quad X = 0 .$$

De randvoorwaarde (2.2) is zeer algemeen en kan op verschillende uiteenlopende fysische situaties betrekking hebben. De grootheden a en b kunnen hetzij constanten hetzij bekende functies van de tijd zijn. In het algemeen moeten zij van te voren experimenteel of semi-experimenteel bepaald zijn.

Ter wille van de eenvoud en ook om de methode gemakkelijk te kunnen demonstreren beschouwen we i.p.v. (2.2) de eenvoudiger randvoorwaarde

$$(2.5) \quad T = T_m \{ 1 - f(t) \} ,$$

hetgeen wil zeggen, dat het temperatuursverloop aan de wand $x=0$ bekend is verondersteld.

De randvoorwaarde (2.3) drukt uit dat het front $X(t)$, dat zich in de tijd dt over een afstand dX verplaatst, in die tijd een hoeveelheid warmte van $\rho L dX$ per oppervlakte-element produceert.

We nemen nu aan, dat ρ, c en L constanten zijn en dat K eventueel nog iets van T mag afhangen. We vervangen nu T door de nieuwe variabele

$$(2.6) \quad v = \frac{1}{T_m K(T_m)} \int_T^{T_m} K(T) dT,$$

waardoor (2.1) overgaat in

$$(2.7) \quad \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t},$$

met

$$(2.8) \quad \kappa = \frac{K(T)}{\rho c}.$$

Nu is echter κ een functie van T en kan dus ook opgevat worden als een functie van v . Volgens Carslaw and Jaeger § 1.6 I mag men echter κ in (2.7) met een gerust geweten door een constante (gemiddelde) vervangen, aangezien de variabiliteit van K primair door (2.6) tot uitdrukking kan worden gebracht.

We zullen het ons nu maar gemakkelijk maken en ook K constant nemen (zie echter § 4). De dimensieloze variabele v is nu

$$(2.9) \quad v = 1 - \frac{T}{T_m}.$$

De randvoorwaarden luiden uitgedrukt in v als volgt

$$(2.10) \quad x = 0 \quad v = f(t),$$

$$(2.11) \quad x = X(t) \begin{cases} v = 0, \\ \kappa \frac{\partial v}{\partial x} + \gamma \frac{dX}{dt} = 0, \end{cases}$$

waarbij γ de volgende dimensieloze groep voorstelt

$$(2.12) \quad \gamma = \frac{L}{c T_m}.$$

Bij de te maken numerieke toepassing gebruiken we de door de "Hoogovens" verstrekte gegevens betreffende een staalsoort

ρ	7.3	$(\text{gm})/(\text{cm}^3)$
c	0.15	$(\text{cal})/(\text{gm})(^{\circ}\text{C})$
K	0.07	$(\text{cal})/(\text{cm})(\text{sec})(^{\circ}\text{C})$
κ	0.064	$(\text{cm}^2)/(\text{sec})$
L	66	$(\text{cal})/(\text{gm})$
T_m	1530	$^{\circ}\text{C}$

Hieruit volgt dat $\gamma = 0.287$.

Voordat we de discussie van het algemene geval vervolgen zullen we eerst het elementaire geval beschouwen waarbij $f(t)$ een constante ($=v_0$) is.

3. Probleem van Neumann

Ter wille van de duidelijkheid herhalen we nog even de mathematische beschrijving

$$(3.1) \quad 0 < x < X(t) \quad \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t} ,$$

$$(3.2) \quad x = 0 \quad v = v_0 ,$$

$$(3.3) \quad x = X(t) \quad \begin{cases} v = 0 \\ \kappa \frac{\partial v}{\partial x} + \gamma \frac{dX}{dt} = 0 . \end{cases}$$

Het blijkt te gelukken een oplossing te vinden waarbij v slechts van de combinatie $p=x/(2\sqrt{\kappa t})$ afhangt. Deze oplossing is

$$(3.4) \quad v = v_0 - A \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} ,$$

waarbij A een nog nader te bepalen constante is. De functie erf (error functie) is gedefinieerd als

$$(3.5) \quad \operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du .$$

We merken even op dat voor kleine waarden van z

$$(3.6) \quad \operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(z - \frac{1}{3} z^3 + \dots \right) ,$$

en voor grote waarden van z

$$(3.7) \quad \operatorname{erf} z = 1 - \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} + \dots \right) .$$

De oplossing (3.4) voldoet aan (3.1) en (3.2). Uit de eerste voorwaarde van (3.3) volgt

$$(3.8) \quad A \operatorname{erf} \frac{X}{2\sqrt{\kappa t}} = v_0 .$$

We kunnen dus stellen

$$(3.9) \quad X(t) = 2q\sqrt{\kappa t} .$$

Dan is dus

$$(3.10) \quad A \operatorname{erf} q = v_0 .$$

Uit de tweede voorwaarde van (3.3) volgt in verband hiermee

$$(3.11) \quad \sqrt{\pi} q e^{q^2} \operatorname{erf} q = v_0 / \gamma.$$

Hieruit kan dus bij gegeven v_0 de waarde van q gevonden worden. We hebben dus als oplossing

$$(3.12) \quad \begin{cases} v_1 = v_0 - \gamma \sqrt{\pi} q e^{q^2} \operatorname{erf} p & p < q \\ v = 0 & p > q \end{cases}$$

Enkele waarden van het linkerlid van (3.11) volgen hieronder

q	$\sqrt{\pi} q e^{q^2} \operatorname{erf} q$
0.4	0.3564
0.45	0.4644
0.5	0.5205
0.55	0.7432
0.6	0.9205
0.65	1.1286
0.7	1.3727
0.75	1.6593
0.8	1.9956

Bij wijze van numerieke toepassing leidt een wandtemperatuur van $T_0 = 1200^\circ$ tot $v_0 = 0.216$ en $q = 0.55$. Uit (3.9) volgt dan dat na b.v. 10 uur het front zich bevindt op een afstand van 53 cm van de wand.

Voor de totale hoeveelheid uitgestraalde warmte per oppervlakte-eenheid $Q(t)$ in een interval t vinden we gemakkelijk

$$(3.13) \quad \begin{aligned} Q(t) &= \int_0^t K \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho c A T_m \sqrt{\kappa t} = \\ &= 2 \rho L q e^{q^2} \sqrt{\kappa t}. \end{aligned}$$

In bovengenoemd voorbeeld is dit 35 (kcal)/(cm²).

4. Generalisatie van het probleem van Neumann

We beschouwen nu het probleem van Neumann waarbij κ van de temperatuur T afhangt. Indien we de substitutie (2.6) uitvoeren luidt het probleem nu

$$(4.1) \quad 0 < x < X(t) \quad \kappa(v) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$(4.2) \quad x = 0 \quad v = v_0,$$

$$(4.3) \quad x = X(t) \quad \begin{cases} v = 0, \\ \kappa(0) \frac{\partial v}{\partial x} + \gamma \frac{dX}{dt} = 0. \end{cases}$$

Volgens een opmerking van M.L. Potters laat ook dit probleem een oplossing toe welke van de combinatie $u = x/2\sqrt{t}$ afhangt. Stellen we $v = v(u)$, dan gaat (4.1) over in

$$(4.4) \quad \kappa(v) \frac{d^2 v}{du^2} + 2u \frac{dv}{du} = 0,$$

met de randvoorwaarden

$$(4.5) \quad u = 0 \quad v = v_0,$$

$$(4.6) \quad u = u_m \quad \begin{cases} v = 0 \\ \kappa(0) \frac{dv}{du} + 2\gamma u = 0. \end{cases}$$

Hierbij is uiteraard u_m voorlopig een onbekende constante. Integratie van (4.4) en (4.5), (4.6) is in principe mogelijk en hierdoor is u_m ook bepaald. Tenslotte volgt het front uit

$$(4.7) \quad X(t) = 2u_m \sqrt{t}.$$

5. Reductie tot een integraalvergelijking

We vervolgen nu weer het hoofdprobleem, d.w.z. de vergelijking (2.7) met de randvoorwaarden (2.10) en (2.11). In plaats van (2.10) kan ook een andere voorwaarde gekozen worden. De methode blijft echter dezelfde. We stellen nu

$$(5.1) \quad v = v_1 + v_2$$

waarbij v_1 de temperatuursverdeling aangeeft bij afwezigheid van het stollingsproces en waarbij v_2 de temperatuursverdeling aangeeft ten gevolge van alleen het vrijkomen van de stollingswarmte. Voor $x=0$ is dus

$$(5.2) \quad v_1 = f(t) \quad \text{en} \quad v_2 = 0.$$

De oplossing v_1 is elementair (zie Carslaw and Jaeger p.63). Men heeft

$$(5.3) \quad v_1(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f\left(t - \frac{x^2}{4\kappa\mu^2}\right) e^{-\mu^2} d\mu$$

of in iets andere vorm

$$(5.4) \quad v_1(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi\kappa}} \int_0^t f(\lambda) (t-\lambda)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa(t-\lambda)}\right) d\lambda.$$

Indien $f(t)$ een eenvoudige functie is (zie Carslaw and Jaeger l.c.) leidt (5.3) of (5.4) tot een betrekkelijk eenvoudige uitdrukking. Is in het bijzonder $v=v_0$ dan reduceert (5.3) zich tot

$$(5.5) \quad v_1(x,t) = v_0 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}},$$

waarbij

$$(5.6) \quad \operatorname{erfc} z = 1 - \operatorname{erf} z.$$

De oplossing van het tweede probleem kan eveneens gemakkelijk gevonden worden. We maken hierbij gebruik van de elementaire oplossing $E(x,t)$ behorende bij een momentane puntbron op de plaats $x=0$ op het tijdstip $t=0$ nml.

$$(5.7) \quad E(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}}.$$

Volgens Carslaw and Jaeger p.262 en p.293 is de oplossing

$$(5.8) \quad v_2 = -\gamma \int_0^t \left[E \{ x - X(\lambda), t - \lambda \} - E \{ x + X(\lambda), t - \lambda \} \right] X'(\lambda) d\lambda .$$

Deze oplossing kan geïnterpreteerd worden als de som van de bijdragen van de warmtebron aan het lopende front $x = X(t)$ en van een tegengestelde t.o.v. $x=0$ gespiegelde oneigenlijke warmtebron bij $x = -X(t)$.

Tenslotte stellen we de voorwaarde dat aan het front $x = X(t)$ aan $v=0$ voldaan moet zijn, derhalve

$$(5.9) \quad v_1(X(t), t) + v_2(X(t), t) = 0.$$

Denken we de uitdrukkingen (5.3) en (5.8) in (5.9) gesubstitueerd dan ontstaat een integraalvergelijking waardoor $X(t)$ bepaald is. De oplossing van deze integraalvergelijking is in het algemeen slechts met behulp van numerieke hulpmiddelen mogelijk. Toch kan men er langs analytische weg nog wel enige resultaten aan ontleenen. In de eerste plaats gaan we nog eens na wat deze methode in het geval van het in § 3 behandelde probleem van Neumann oplevert.

6. Discussie van de integraalvergelijking

Indien $f(t) \equiv v_0$ volgt uit (5.3) onmiddellijk

$$(6.1) \quad v_1(x, t) = v_0 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}.$$

Stellen we

$$(6.2) \quad x = 2p\sqrt{\kappa t} \quad X = 2q\sqrt{\kappa t},$$

dan volgt uit (5.8) na een elementaire herleiding

$$(6.3) \quad v_2 = -\frac{\gamma q}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \left\{ \exp \frac{-(p-q\sqrt{u})^2}{1-u} - \exp \frac{-(p+q\sqrt{u})^2}{1-u} \right\} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}.$$

Het rechterlid van (6.3) kan uitgedrukt worden in error-functies.

De volgende methode leidt snel tot het doel. Uit (6.3) volgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial p} &= \frac{\gamma q}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^1 \frac{p-qu^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}(1-u)^{3/2}} \exp \frac{-(p-qu^{\frac{1}{2}})^2}{1-u} du + \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 \frac{p+qu^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}(1-u)^{3/2}} \exp \frac{-(p+qu^{\frac{1}{2}})^2}{1-u} du \right\} = \\ &= \frac{2\gamma q}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^1 \exp - \left\{ \frac{(q-pu^{\frac{1}{2}})^2}{1-u} + p^2 - q^2 \right\} d \frac{q-pu^{\frac{1}{2}}}{(1-u)^{\frac{1}{2}}} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \exp - \left\{ \frac{(q+pu^{\frac{1}{2}})^2}{1-u} + p^2 - q^2 \right\} d \frac{q+pu^{\frac{1}{2}}}{(1-u)^{\frac{1}{2}}} \right\} = \\ (6.4) \quad &= \begin{cases} = -2\gamma q e^{q^2-p^2} \operatorname{erfc} q & \text{indien } p < q, \\ = 2\gamma q e^{q^2-p^2} \operatorname{erf} q & \text{indien } p > q. \end{cases} \end{aligned}$$

Aangezien $v_2 \rightarrow 0$ voor $p \rightarrow \infty$ volgt na integratie van dit resultaat

$$(6.5) \quad v_2 = \begin{cases} -\pi^{\frac{1}{2}} \gamma q e^{q^2} \operatorname{erf} p \operatorname{erfc} q & \text{voor } p < q, \\ -\pi^{\frac{1}{2}} \gamma q e^{q^2} \operatorname{erfc} p \operatorname{erf} q & \text{voor } p > q. \end{cases}$$

Het bovenstaande resultaat is reeds in 1929 door Lightfoot gevonden, overigens op vrij ingewikkelde wijze (zie Carslaw and Jaeger p.293).

De integraalvergelijking (5.9) wordt met $X(t) = 2q\sqrt{\kappa t}$ nu

$$(6.6) \quad v_0 \operatorname{erfc} q - \pi^{\frac{1}{2}} \gamma q e^{q^2} \operatorname{erf} q \operatorname{erfc} q = 0,$$

hetgeen inderdaad equivalent is met (3.11).

We kunnen van het bovenstaande gebruik maken om een schatting af te leiden van de snelheid waarmee het stollingsfront $X(t)$ voortschrijdt indien $f(t)$ een willekeurige functie van de tijd is. Bij wijze van illustratie kiezen we het geval

$$(6.7) \quad f(t) = at^{\frac{1}{2}}.$$

Volgens Carslaw and Jaeger p.63 is

$$(6.8) \quad v_1(x,t) = a(\pi t)^{\frac{1}{2}} \text{ierfc} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}},$$

waarbij

$$(6.9) \quad \text{ierfc} z \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-z^2} - z \text{erfc} z.$$

Deze oplossing kan ook geïnterpreteerd worden als te behoren bij een constant warmteverlies per oppervlakte-eenheid aan de wand $x=0$. We maken nu de hypothese dat $X(t)$ ongeveer met de wortel van de tijd toeneemt, d.w.z.

$$(6.10) \quad X(t) = 2q\sqrt{\kappa t},$$

waarbij nu q weliswaar van de tijd afhangt, maar overigens toch weinig van een constante afwijkt. Bij de integraalvergelijking (5.9) is de eerste term exact

$$(6.11) \quad v_1(X(t),t) = a(\pi t)^{\frac{1}{2}} \text{ierfc} q.$$

De tweede term is in eerste benadering, nml. q constant, volgens (6.6) gelijk aan

$$(6.12) \quad v_2(X(t),t) = -\pi^{\frac{1}{2}} q e^{q^2} \text{erf} q \text{erfc} q,$$

zodat dus de integraalvergelijking benaderd kan worden door

$$(6.13) \quad a t^{\frac{1}{2}} \text{ierfc} q = \gamma q e^{q^2} \text{erf} q \text{erfc} q.$$

We vatten nu q weer als een functie van de tijd op welke door (6.13) bepaald is. Aldus vindt men een tweede benadering van q en dus van $X(t)$.

Onderstaande tabel geeft de uitdrukking

$$(6.14) \quad q = \pi^{\frac{1}{2}} q e^{q^2} \text{erf} q \text{erfc} q / \text{ierfc} q$$

voor enkele waarden van q .

q	Q	Q ²
0.4	0.808	0.653
0.45	1.084	1.175
0.5	1.423	2.024
0.55	1.836	3.371
0.6	2.338	5.466
0.65	2.947	8.684
0.7	3.683	13.56

Met behulp van deze tabel kan men gemakkelijk een grafiek samenstellen, waarbij q tegen $\pi a^2 \gamma^{-2} t$ uitgezet is. Het blijkt uit deze benadering dat, afgezien van het begin, q slechts weinig met de tijd toeneemt, hetgeen in overeenstemming is met de veronderstelling welke we bij het afleiden van deze benadering gemaakt hebben.

Kiezen we ter illustratie $a = \pi^{-\frac{1}{2}} \gamma$ of

$$(6.15) \quad v = 0.159 t^{\frac{1}{2}} \quad (t \text{ in uren}),$$

zodat met een begintemperatuur $T_m = 1530^\circ$ de temperatuur van de wand na 10 uur ongeveer 730° bedraagt, dan volgt uit de grafiek dat na deze 10 uur het front zich op ongeveer 64 cm van de wand bevindt. Uit deze tweede benadering volgt dat het stollingsfront enigszins sneller dan met een $\sqrt{t}$ -wet voortschrijdt, hetgeen ook wel a priori duidelijk is omdat de oppervlaktetemperatuur steeds lager is (verg. grafiek 1).

Het verfijnen van deze benadering zal hieronder beschreven worden. Evenwel vereist dit proces de berekening van een groot aantal integralen hetgeen alleen redelijk uitvoerbaar is met behulp van een elektronische rekenmachine. Op het Mathematisch Centrum is dit benaderingsproces getest en bruikbaar bevonden. Echter is het onderzoek in deze fase stopgezet in verband met elders gevonden resultaten.

We beschouwen nogmaals het oorspronkelijke probleem met de randvoorwaarde (2.10) waarbij $f(t)$ een willekeurige functie van de tijd is. Bij de proefberekening is hiervoor een ons door de Hoogovens ter beschikking gestelde grafiek gebruikt. De integraalvergelijking (5.9) schrijven we in de vorm

$$(6.16) \quad v_1(X(t), t) = -v_2(X(t), t).$$

In de eerste plaats vervaardigen we een tabel of een reeks grafieken van $v_1(x,t)$ als functie van x en t . Dat vereist een aantal numerieke integraties met behulp van de voorstelling (5.4). We hebben hierboven gezien dat deze eerste stap overbodig is indien $f(t)$ een eenvoudige functie is omdat dan $v_1(x,t)$ door een eenvoudige analytische uitdrukking voorgesteld kan worden. We nemen nu als eerste benadering voor $X(t)$ de formule (6.10) aan waarbij q constant is.

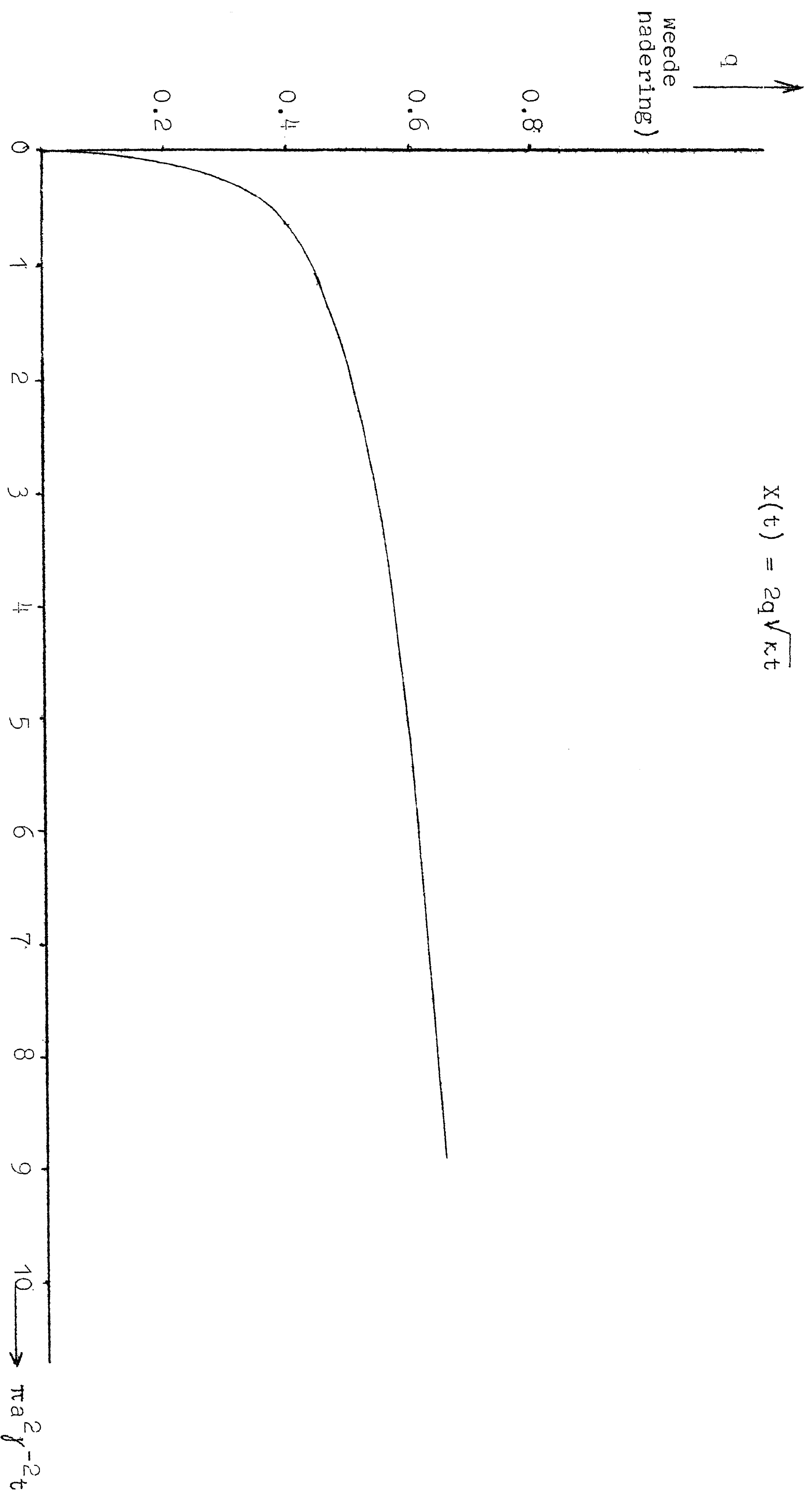
Het rechterlid van (6.16) is nu de eenvoudige uitdrukking (6.12). We kunnen de betrekking (6.16) nu gaan opvatten als een impliciete bepaling van q als functie van t . Aldus ontstaat een tweede benadering van $X(t)$, waarbij in de voorstelling (6.10) nu q van de tijd afhangt. De volgende stap bestaat hierin om de tweede benadering van $X(t)$ te substitueren in het rechterlid van (6.16). Echter moet nu ook dit rechterlid door numerieke integratie met behulp van (5.8) bepaald worden. Kennen we dit rechterlid als functie van de tijd dan levert gelijkstelling met het linkerlid een volgende benadering van $X(t)$. We kunnen dit proces beschrijven met

$$(6.17) \quad v_1 \{ x^{(n+1)}(t), t \} = -v_2 \{ x^{(n)}(t), t \} ,$$

waarbij $x^{(n)}$ de n^e benadering is.

We hebben redenen om aan te nemen dat de tweede benadering reeds voldoende betrouwbaar is. Een numerieke verificatie van dit vermoeden is niet meer tot uitvoering gekomen.

$$X(t) = 2q\sqrt{\kappa t}$$



Voortschrijden van stollingsfront $X(t)$ bij oppervlaktetemperatuur $\frac{T}{T_m} = 1 - 0.162t^{\frac{1}{2}}$

grafiek 1

Literatuur

- Carslaw and Jaeger. Conduction of Heat in solids 2nd ed. Oxford 1959. (Zie in het bijzonder ch. XI.)
- Ruddle. Solidification of castings. London 1950.
- Lightfoot. Proc. Lond. Math. Soc. (2), 31, 97, (1929).
- Lachmann. Z.a.Math. Mech. 15, 345, (1935).
17, 379, (1937).
19, 1 , (1939).
- Price and Slack. Brit.J.Appl. Phys. 5, 285 (1954).
- Crank. Quart. J. Mech. Appl. Math. 10, 220, (1957).
- Evans, Isaacson, Mc Donald. Quart. Appl. Math. 8, 312, (1950).
- Blevin. Aust. J. Phys. 6, 203, (1953).
- Sarjant and Slack. J. Iron Steel Inst., 428, (1954).